

3 Rektifikacione krive i dužina luka. Prirodna parametrizacija krive.

U ovoj lekciji želimo da uvedemo koncept dužine luka krive. Ideja je da aproksimiramo krivu uz pomoć uzastopno upisanih nadovezanih duži (poligonalnih linija), tehniku koju smo naučili iz analitičke geometrije. Intuicija nam govori da dužina poligonalne linije (uzastopno upisanih nadovezanih duži) nebi trebala biti duža od dužine krive (s obzirom da je prava linija najkraći put između dvije tačke), iz čega bi mogli naslutiti da će dužina krive biti jednaka gornjoj granici skupa dužina svih mogućih poligonalnih linija. Prema tome, izgleda da možemo, na prirodan način definisati dužinu krive kao najmanja gornja granica dužina svih mogućih poligonalnih linija.

Za većinu krivih koje se pojavljuju u praksi, ovo nam daje korisnu definiciju dužine luka. Kakogod, kao što ćemo vidjeti, postoje krive za koje nije moguće naći gornju granicu dužina upisanih poligonalnih linija. Prema tome, javlja se potreba da klasificiramo krive u dvije kategorije: one koje imaju dužinu i one koje nemaju. Prve zovemo rektifikacione krive, dok one krive koje nemaju dužinu zovemo nerektifikacione.

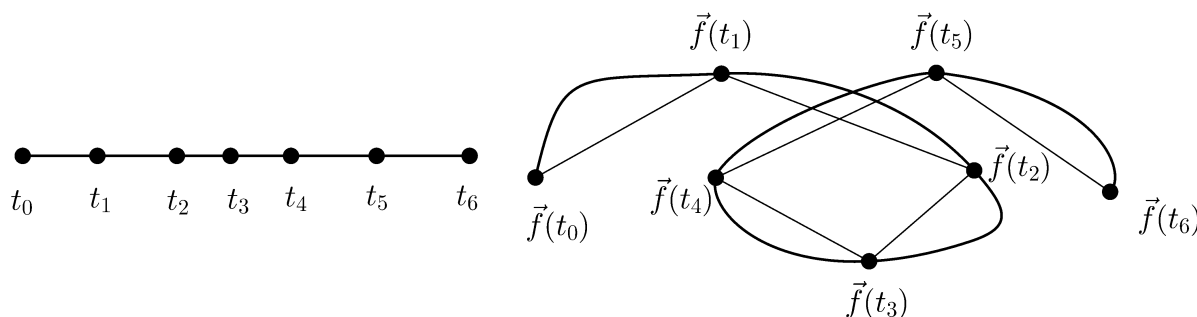
Sljedeće što želimo je da formalno opišemo ovu ideju. Neka je $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$$

data kriva u prostoru. Za svaku podjelu intervala $[a, b]$ datu sa

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}, \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

tačke $\vec{f}(t_0), \vec{f}(t_1), \dots, \vec{f}(t_m)$, predstavljaju vrhove upisane poligonalne linije.



Dužinu ove poligonalne linije ćemo označiti sa duž $_{\vec{f}}(P)$ i definisati kao sumu

$$\text{duž}_{\vec{f}}(P) = \sum_{k=1}^m |\vec{f}(t_k) - \vec{f}(t_{k-1})|$$

Ako je skup brojeva duž $_{\vec{f}}(P)$ za svaku podjelu P intervala $[a, b]$ ograničen, tada za krivu \vec{f} kažemo da je rektifikabilna na $[a, b]$ i njezina dužina luka, koju ćemo označavati sa s , definišemo sa

$$s = \sup\{\text{duž}_{\vec{f}}(P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\},$$

gdje je $\mathcal{P}[a, b]$ skup svih mogućih podjela intervala $[a, b]$. Ako skup brojeva duž $_{\vec{f}}(P)$ nije ograničen, za \vec{f} kažemo da je nerektifikabilna.

25. Koristeći isključivo definiciju, ispitati da li kriva $\vec{x} = t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2$ na intervalu $[0, 1]$ ima dužinu, ako su $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ i $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. [duž $_{\vec{x}}(P) \leq 3$]

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadana jednačinom (parametarskom vektorskom obliku)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

ili u parametarskom skalarnom obliku

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_0 do tačke sa parametrom t_1 data formulom

$$s = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

(primjetimo da je $\int_{t_0}^{t_1} ds$ krivoliniski integral prve vrste (poznat iz Analize III)).

26. Napisati parametarski oblik jednačine krive

$$4ax = (y + z)^2; \quad 4x^2 + 3y^2 = 3z^2$$

i naći dužinu drive od tačke $O(0, 0, 0)$ do proizvoljne tačke A krive.

$$[x = at^2, y = a(t - \frac{1}{3}t^3), z = a(t + \frac{1}{3}t^3); s = \sqrt{2}y \text{ gdje je } y \text{ koordinata tačke } A]$$

27. Izračunati dužinu luka s krive $\vec{r} = e^t(\cos t, \sin t, 0)$, od tačke 0 do tačke sa parametrom t . Poslije toga iz formule za dužinu luka s , parametar t izraziti preko s .

$$[s = \sqrt{2}(e^t - 1); t = \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}})]$$

Do sada smo neku krivu \vec{r} obično parametrizirali pomoću parametra t . Parametrizaciju možemo uraditi i pomoću dužine luka krive od neke tačke sa parametrom 0 do tačke sa parametrom λ - parametrizaciju dužinom luka. Ovakvu parametrizaciju zovemo prirodna parametrizacija.

28. Napisati jednačinu krive $\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ izrazivši \vec{r} kao funkciju argumenta luk s . Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente u proizvoljnoj tački.

$$[t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; b)]$$

29. Data je kriva $C : \vec{r} = (a \cos t, a \sin t, a \ln \cos t)$. Napisati jednačinu te krive uvodeći kao argument luk s .

$$[\vec{r} = a(\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{s}{a}}; \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch} \frac{s}{a}} - 1; \ln \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{s}{a}})]$$

30. Posmatrajmo krivu c datu implicitno sa

$$\vec{r}: \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \\ a\sqrt{b^2 - c^2}z = c\sqrt{a^2 - b^2}x \end{cases}$$

gdje su $a > b > c$. Izračunati njenu dužinu luka i nađite reparametrizaciju dužinom luka.

$$[s = bt; \vec{r}(s) = (\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \cos \frac{s}{b}, b \sin \frac{s}{b}, \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \cos \frac{s}{b})]$$